Logic in a Nutshell

Christian Liguda

Quelle: Kastens, Uwe und Büning, Hans K., Modellierung: Grundlagen und formale Methoden, 2009, Carl Hanser Verlag

Übersicht

- Logik - Allgemein
- Aussagenlogik
  - Modellierung
  - Umformungen
  - Schlussfolgern
- Prädikatenlogik

Übersicht

- Logik - Allgemein

- Aussagenlogik
  - Modellierung
  - Umformungen
  - Schlussfolgern

- Prädikatenlogik

Logik - Allgemein

- In der Informatik beschäftigt man sich symbolischer Logik.
- Idee: Formalisierung von Aussagen, Zusammenhängen, Abläufen,…
- Es gibt Logiken für veschiedene Bereiche.
  - Aussagenlogik („Karl ist krank.“ / „Es regnet.“)
  - Prädikatenlogik („Alle Menschen sind sterblich.“ / „Jede natürliche Zahl größer 1 lässt sich als Produkt von Primzahlen darstellen“)
  - Modallogik („Möglicherweise regnet es”)
  - Fuzzy Logik (Aussagen sind nicht wahr oder falsch, sondern zu einem gewissen grad wahr oder falsch, z.B. „Der Zustand s ist ziemlich kritisch“ -> kritisch(s) = 0.7)
  - Temporallogik („Es gibt einen Zeitpunkt zu dem eine Aussage F erfüllbar ist.“ Ermöglicht zeitliche Analysen. Wichtig für Programmanalysen.)

Logik - Allgemein

Eine Logik besteht in der Regel aus folgenden Teilen:

- Eine Menge von atomaren **Symbolen** (Variablen, welche für verschieden Dinge stehen können, sowie Operatoren und Quantoren)
- **Syntax**: Einer Vorschrift die angibt, wie Symbole zu komplexen Aussagen zusammen gesetzt werden können.
- **Semantik**: Eine Vorschrift die angibt, was ein Symbol oder eine Zusammensetzung aussagt (z.b. das eine „und“ Verknüpfung zweier Aussagen genau dann wahr ist, wenn beide Aussagen wahr sind.
- **Kalkül**: Eine Vorschrift die angibt, wie aus bestehenden Formeln weitere Formeln generiert werden können um neues Wissen zu erhalten.

Übersicht

- Logik - Allgemein
- Aussagenlogik
  - Modellierung
  - Umformungen
  - Schlussfolgern
- Prädikatenlogik

Aussagenlogik - Modellierung

Definition (Aussagenlogische Formeln)

Die Struktur aussagenlogischer Formeln wird induktiv definiert:

1. true und false sind Formeln.
2. Variablen sind Formeln.
3. Ist α eine Formel, dann ist auch ¬ α eine Formel.
4. Sind α und β Formeln, dann sind α ∨ β, α ∧ β,
   α → β und α ↔ β Formeln.
5. Formeln werden nur mit (1) bis (4) gebildet.

Symbole (1–2)

Syntax (3–5)

Beispiel:

Wenn A, B Variablen sind, ist (A ∨ B → ¬A) ist eine aussagenlogische Formel.

Aussagenlogik - Modellierung

Beispiel:

R -> „Es regnet.“

S -> „Die Straße ist nass.“

- Es regnet nicht. $\neg R$
- Es regnet oder die Straße ist nass. $R \vee S$
- Es regnet und die Straße ist nass. $R \wedge S$
- Wenn es regnet, ist die Straße nass. $R \rightarrow S$
- Genau dann, wenn es regnet, ist die Straße nass. $R \leftrightarrow S$
- Die Straße ist nass genau dann, wenn es regnet. $R \leftrightarrow S$
- Die Straße ist nass dann und nur dann, wenn es regnet $R \leftrightarrow S$
- Es gilt, dass die Straße nass ist oder es regnet und außerdem, dass es nicht regnet oder die Straße nicht nass ist. (Oder kurz: Entweder regnet es oder die Straße ist nass. [es kann nicht beides wahr sein]) $(R \vee S) \wedge (\neg R \vee \neg S)$

Aussagenlogik - Modellierung

Frage:

Bis jetzt ist eine Formel wie A ∨ B nur ein syntaktisches Konstrukt. Wie sich die Bedeutung einer Formel aus ihren Teilen ergibt, wird durch die Semantik einer Formel definiert.

Intuitives Beispiel:

Ob A ∨ B nun wahr oder falsch ist, hängt von den Wahrheitswerten von A und B ab.

A <-> true, B <-> false A ∨ B <-> true

A <-> false, B <-> false A ∨ B <-> false

-> nun formaler….

Aussagenlogik - Modellierung

Definition (Bewertung):

Sei $\Im$ eine Bewertung der Atome (also eine Abbildung, welche jeder Variable den Wert **w** oder **f** zuordnet). *Wir erweitern die Bewertung zu einer* ***Bewertung von Formeln****, wobei wir die Erweiterung wieder mit $\Im$ bezeichnen, durch die Regeln*

1. $\Im(\neg\alpha)=\mathbf{w}$ *genau dann, wenn* $\Im(\alpha)=\mathbf{f}$.
2. $\Im(\alpha \wedge \beta)=\mathbf{w}$ *genau dann, wenn* $\Im(\alpha)=\mathbf{w}$ und $\Im(\beta)=\mathbf{w}$.
3. $\Im(\alpha \vee \beta)=\mathbf{w}$ *genau dann, wenn* $\Im(\alpha)=\mathbf{w}$ oder $\Im(\beta)=\mathbf{w}$.
4. $\Im(\alpha \rightarrow \beta)=\mathbf{w}$ *genau dann, wenn* $\Im(\alpha)=\mathbf{f}$ oder $\Im(\beta)=\mathbf{w}$.
5. $\Im(\alpha \leftrightarrow \beta)=\mathbf{w}$ *genau dann, wenn* $\Im(\alpha)=\Im(\beta)=\mathbf{w}$ *oder* $\Im(\alpha)=\Im(\beta)=\mathbf{f}$
6. $\Im(\mathit{true})=\mathbf{w}$ und $\Im(\mathit{false})=\mathbf{f}$

Dies ist die **Semantik** der Aussagenlogik

Aussagenlogik - Modellierung

Beispiel (Bewertung): $\alpha = (\boldsymbol{A} \lor \neg \boldsymbol{B}) \land (\boldsymbol{A} \lor \boldsymbol{B} \rightarrow \boldsymbol{C})$

A	B	C	$(A \lor \neg B)$	$(A \lor B \rightarrow C)$	α
f	f	f			
f	f	w			
f	w	f			
f	w	w			
w	f	f			
w	f	w			
w	w	f			
w	w	w			

Aussagenlogik - Modellierung

Beispiel (Bewertung): $\propto = (A \vee \neg B) \wedge (A \vee B \rightarrow C)$

A	B	C	$(A \vee \neg B)$	$(A \vee B \rightarrow C)$	α
f	f	f	w	w	w
f	f	w	w	w	w
f	w	f	f	f	f
f	w	w	f	w	f
w	f	f	w	f	f
w	f	w	w	w	w
w	w	f	w	f	f
w	w	w	w	w	w

Aussagenlogik - Modellierung

Komplexes Beispiel:

Ingo trifft Maria oder Petra. Wenn er Petra trifft, so trifft er Vera oder Anke. Sollte er Vera treffen, so auch Maria. Aber trifft er Vera nicht, dann trifft er auch nicht Anke. Trifft Ingo Maria?

Aussagenlogik - Modellierung

Komplexes Beispiel:

Ingo trifft Maria oder Petra. Wenn er Petra trifft, so trifft er Vera oder Anke. Sollte er Vera treffen, so auch Maria. Aber trifft er Vera nicht, dann trifft er auch nicht Anke. Trifft Ingo Maria?

M für „Ingo trifft Maria“

P für „Ingo trifft Petra“

A für „Ingo trifft Anke“

V für „Ingo trifft Vera“.

Aussagenlogik - Modellierung

Komplexes Beispiel:

Ingo trifft Maria oder Petra. Wenn er Petra trifft, so trifft er Vera oder Anke. Sollte er Vera treffen, so auch Maria. Aber trifft er Vera nicht, dann trifft er auch nicht Anke. Trifft Ingo Maria?

M für „Ingo trifft Maria“

P für „Ingo trifft Petra“

A für „Ingo trifft Anke“

V für „Ingo trifft Vera“.

Ingo trifft Maria oder Petra. $(M \vee P)$

Wenn er Petra trifft, so trifft er Vera oder Anke. $P \rightarrow (V \vee A))$

Sollte er Vera treffen, so auch Maria. $(V \rightarrow M)$

Trifft er aber Vera nicht, dann trifft er auch nicht Anke. $(\neg V \rightarrow \neg A)$

Aussagenlogik - Modellierung

Komplexes Beispiel:

Ingo trifft Maria oder Petra. Wenn er Petra trifft, so trifft er Vera oder Anke. Sollte er Vera treffen, so auch Maria. Aber trifft er Vera nicht, dann trifft er auch nicht Anke.

Formel: $\alpha = (M \vee P) \wedge (P \rightarrow (V \vee A)) \wedge (V \rightarrow M) \wedge (\neg V \rightarrow \neg A)$

Fragen:

- *Was bedeutet es, dass eine Formel erfüllbar, tautologisch, unerfüllbar oder falsifizierbar ist ?*
- *Wie lässt sich die Formel umformen, ohne ihre Semantik zu verändern ?*
- *Folgt aus* α dass zwangsläufig M wahr ist ? (Trifft Ingo Maria ?)

Aussagenlogik - Modellierung

Definition:

- *Eine Formel* α *ist* ***erfüllbar*** *genau dann, wenn es eine Bewertung* $\mathfrak{I}$ *mit* $\mathfrak{I}$(α)=**w** *gibt.*
- *Eine Formel* α *ist* ***tautologisch*** *(eine* ***Tautologie, allgemeingültig)*** *genau dann, wenn die Formel für jede Bewertung* $\mathfrak{I}$ *den Wert* $\mathfrak{I}$(α)=**w** *besitzt, also wahr ist.*
- *Eine Formel* α *ist* ***widerspruchsvoll*** *(**unerfüllbar**) genau dann, wenn die Formel für jede Bewertung* $\mathfrak{I}$ *den Wert* $\mathfrak{I}$(α)=**f** *besitzt, also falsch ist.*
- *Eine Formel* α *ist* ***falsifizierbar*** *genau dann, wenn es für die Formel eine Bewertung* $\mathfrak{I}$ *gibt, für die* $\mathfrak{I}$(α)=**f** *gilt, also die Formel falsch wird.*

Aussagenlogik - Modellierung

Beispiele:

(z.B. A -> „Es regnet.“ P -> „Die Straße ist nass.“)

	erfüllbar	tautologisch	unerfüllbar	falsifizierbar
A	ja	nein	nein	ja
$A \vee P$	ja	nein	nein	ja
$A \vee \neg A$	ja	ja	nein	nein
$A \wedge \neg A$	nein	nein	ja	ja

Übersicht

- Logik - Allgemein
- Aussagenlogik
  - Modellierung
  - Umformungen
  - Schlussfolgern
- Prädikatenlogik

Aussagenlogik - Umformungen

Ziel: Kann man Formeln umformen und vereinfachen, so dass ersichtlich ist, ob sie widerspruchsvoll sind oder nicht ?

Frage: Wie kann man Formeln so umformen, dass sie die gleiche Semantik haben ?

Definition (Logische Äquivalenz)

Die Formeln α und β heißen logisch äquivalent, in Zeichen $\alpha \approx \beta$, genau dann, wenn $\mathfrak{I}(\alpha) = \mathfrak{I}(\beta)$ für alle Bewertungen $\mathfrak{I}$ gilt.

Beispiel:

$(\alpha \rightarrow \beta) \approx (\neg\alpha \vee \beta)$ (Sieht man sofort durch Wahrheitstafeln)

$\neg \neg \alpha \approx \alpha$

Aussagenlogik - Umformungen

Umformungsregeln

Negation	$\neg\neg\alpha \approx \alpha$
Idempotenz	$\alpha \vee \alpha \approx \alpha$ $\alpha \wedge \alpha \approx \alpha$
Kommutativität	$\alpha \vee \beta \approx \beta \vee \alpha$ $\alpha \wedge \beta \approx \beta \wedge \alpha$
Assoziativität	$(\alpha \vee \beta) \vee \sigma \approx \alpha \vee (\beta \vee \sigma)$ $(\alpha \wedge \beta) \wedge \sigma \approx \alpha \wedge (\beta \wedge \sigma)$
Distributivität	$(\alpha \wedge \beta) \vee \sigma \approx (\alpha \vee \sigma) \wedge (\beta \vee \sigma)$ $(\alpha \vee \beta) \wedge \sigma \approx (\alpha \wedge \sigma) \vee (\beta \wedge \sigma)$
De Morgan	$\neg(\alpha \wedge \beta) \approx \neg\alpha \vee \neg\beta$ $\neg(\alpha \vee \beta) \approx \neg\alpha \wedge \neg\beta$
Komplement	$\alpha \vee \neg\alpha \approx \text{true}$ $\alpha \wedge \neg\alpha \approx \text{false}$
Neutrale Elemente	$\alpha \wedge \text{true} \approx \alpha \quad \alpha \wedge \text{false} \approx \text{false}$ $\alpha \vee \text{true} \approx \text{true} \quad \alpha \vee \text{false} \approx \alpha$

Alles ist durch Wahrheitstafel nachprüfbar.

Aussagenlogik - Umformungen

Konjunktive Normalform - Definition:

Eine Formel F ist in konjunktiver Normalform (KNF), falls sie eine Konjunktion von Disjunktionen von Literalen ist, d.h. F hat die Form: $F = (L_{1,1} \vee \ldots \vee L_{1,m1}) \wedge \ldots \wedge (L_{n,1} \vee \ldots \vee L_{1,mn})$

Konjunktive Normalform - Vorgehen:

- *Negationen werde in komplexe Ausdrücke gezogen*
  (z.B. ¬(α ∧ β) ≈ ¬α ∨ ¬β)
- *Doppelte Negationen werden aufgelöst* (¬¬α ≈ α)
- *Folgerungen und Äquivalenzen werden aufgelöst*
  (α → β) ≈ (¬α ∨ β)
- *Schritte wiederholen, bis Negationen nur unmittelbar vor einem Atom stehen, keine Folgerungen und Aquivalenzen mehr vorkommen und die Formel eine* ∧-Verknüpfung von ∨-Verknüpfungen ist (Konjunktion von Disjunktion)

Aussagenlogik - Umformungen

Konjunktive Normalform - Beispiel:

Gegeben sei die Formel $\alpha = \neg(A \wedge (\neg B \vee \neg(\neg C \wedge E) \vee \neg A))$

$\approx \neg(A \wedge (\neg B \vee (C \vee \neg E) \vee \neg A))$

$\approx \neg(A \wedge (\neg B \vee C \vee \neg E \vee \neg A))$

$\approx \neg A \vee (B \wedge \neg C \wedge E \wedge A)$

$\approx (\neg A \vee \mathrm{B}) \wedge (\neg A \vee \neg C) \wedge (\neg A \vee \mathrm{E}) \wedge (\neg A \vee \mathrm{A})$

$\approx (\neg A \vee \mathrm{B}) \wedge (\neg A \vee \neg C) \wedge (\neg A \vee \mathrm{E})$

Übersicht

- Logik - Allgemein
- Aussagenlogik
  - Modellierung
  - Umformungen
  - Schlussfolgern
- Prädikatenlogik

Aussagenlogik - Schlussfolgern

Motivation: Wann folgt eine Aussage aus einer oder mehreren anderen ? (z.B. ob die Aussage „Ingo trifft Maria." aus anderen Aussagen folgt)

Definition (Semantische Folgerung)

Sei M eine Menge aussagenlogischer Formeln und β eine aussagenlogische Formel. β folgt semantisch aus M (Notation: $M \models \beta$) genau dann, wenn für jede Bewertung $\mathfrak{I}$, für die alle Formeln in M erfüllt sind, auch β wahr ist. D.h. falls $\mathfrak{I}(\alpha)=w$ für alle $\alpha \in M$ gilt, dann muss auch $\mathfrak{I}(\beta)=w$ gelten. Enthält M nur eine Formel α, schreibt man auch kurz $\alpha \models \beta$.

Aussagenlogik - Schlussfolgern

Definition (Semantische Folgerung)

Sei M eine Menge aussagenlogischer Formeln und β eine aussagenlogische Formel. β folgt semantisch aus M (Notation: M |= β) genau dann, wenn für jede Bewertung $\mathfrak{I}$, für die alle Formeln in M erfüllt sind, auch β wahr ist. D.h. falls $\mathfrak{I}(\alpha)=w$ für alle $\alpha \in M$ gilt, dann muss auch $\mathfrak{I}(\beta)=w$ gelten. Enthält M nur eine Formel α, schreibt man auch kurz α |= β.

Beispiel:

A1 = „Es regnet." A2 = „Ich gehe ins Kino."

α1 = A1 -> A2 α2 = ¬ A2 M = {*α1, α2*} *β = A1*

Gilt: M |= β ?

Aussagenlogik - Schlussfolgern

Definition (Semantische Folgerung)

Sei M eine Menge aussagenlogischer Formeln und β eine aussagenlogische Formel. β folgt semantisch aus M (Notation: M |= β) genau dann, wenn für jede Bewertung $\mathfrak{I}$, für die alle Formeln in M erfüllt sind, auch β wahr ist. D.h. falls $\mathfrak{I}(\alpha)$=w für alle α ∊ M gilt, dann muss auch $\mathfrak{I}(\beta)$=w gelten. Enthält M nur eine Formel α, schreibt man auch kurz α |= β.

A1	A2	α1	α2	β
W	W			
W	F			
F	W			
F	F			

Aussagenlogik - Schlussfolgern

Definition (Semantische Folgerung)

Sei M eine Menge aussagenlogischer Formeln und β eine aussagenlogische Formel. β folgt semantisch aus M (Notation: M |= β) genau dann, wenn für jede Bewertung ℑ, für die alle Formeln in M erfüllt sind, auch β wahr ist. D.h. falls ℑ(α)=w für alle α ∈ M gilt, dann muss auch ℑ(β)=w gelten. Enthält M nur eine Formel α, schreibt man auch kurz α |= β.

A1	A2	α1	α2	β
W	W	W	F	W
W	F	F	W	W
F	W	W	F	F
F	F	W	W	F

Fazit: Die einzige Belegung, für welche alle Formeln in M erfüllt sind ist (A1=F, A2=F), für diese ist aber β nicht erfüllt. Somit folgt *β* nicht aus M.

Aussagenlogik - Schlussfolgern

Problem: Ergebnis nur durch ausprobieren.

Durch das Verfahren kann man das „Trifft Ingo Maria“ Beispiel lösen, ist aber aufwendig.

Anderer Ansatz:

$\alpha \models \beta$ *genau dann, wenn* $\alpha \wedge \neg\beta$ *widerspruchsvoll ist (REGEL)*

Anwendung auf das „Ingo trifft Maria“ Beispiel:

Statt $\alpha \models M$ zu betrachten, betrachtet man:

$(M \vee P) \wedge (P \rightarrow (V \vee A)) \wedge (V \rightarrow M) \wedge (\neg V \rightarrow \neg A) \wedge \neg M \quad (*)$

Frage: Ist (*) widerspruchsvoll ?

Aussagenlogik - Schlussfolgern

Vorgehen:

1. *Formel wird auf Konjunktive Normalform (KNF) gebracht.*

2. *Formel über Umformungen immer weiter vereinfachen, bis sich ein Wiederspruch ergibt, oder weitere Vereinfachungen nicht möglich sind.*

Regel: $(\neg\alpha \vee \beta) \wedge \alpha \approx \beta$ (Resolutionsregel)

Beispiel (*):

$(M \vee P) \wedge (P \rightarrow (V \vee A)) \wedge (V \rightarrow M) \wedge (\neg V \rightarrow \neg A) \wedge \neg M$

Siehe Tafel

Übersicht

- Logik - Allgemein
- Aussagenlogik
  - Modellierung
  - Umformungen
  - Schlussfolgern
- Prädikatenlogik

Prädikatenlogik - Motivation

Beispiele:

1. Philosophie:

   Alle Menschen sind sterblich.

   Sokrates ist ein Mensch.

   Ist Sokrates sterblich ?

2. Informatik: Eine Ampelschaltung besteht aus 2 Ampeln. Für beide Ampeln gilt, dass sie im Laufe der Zeit immer wieder Grünphasen haben. Allerdings werden niemals beide Ampeln gleichzeitig grün. Wie lässt sich die Menge der Abläufe beschreiben ?

Prädikatenlogik - Idee

Unterschied zur Aussagenlogik:

- Aussagenlogik verknüpft Aussagen.
- Prädikatenlogik verknüpft Variablen, Funktionen und Prädikate.
- Prädikatenlogik kann etwas über die Existenz und Allgemeingültigkeit von Variablen sagen.

(Dies ist Prädikatenlogik 1. Ordnung. Prädikatenlogik höherer Ordnung kann auch etwas über die Existenz und Allgemeingültigkeit von Funktionen und Prädikaten aussagen. Prädikatenlogik höherer Ordnung ist schwerer zu handhaben, erfüllt einige wünschenswerte Eigenschaften nicht, ist aber notwendig um einige Bereiche (z.B. Mathematik) zu beschreiben.)

Prädikatenlogik - Begriffe

Begriff: Prädikat

Ein Prädikat ist eine Relation, welche zwischen Variablen gilt, oder eine Eigenschaft für eine Variable.

Beispiele:

- *Geschwister(x, y)* *Bedeutung: x und y sind Geschwister*
- *Vater(x,y)* *Bedeutung: x ist der Vater von y (Reihenfolge kann selbst festgelegt werden)*
- *Prim(x)* *Bedeutung: x ist eine Primzahl*
- *Eltern(x,y,z)* *Bedeutung: x und y sind Eltern von z.*
- *Grün(x,t)* *Bedeutung: Die Ampel x ist zum Zeitpunkt t in einer Grünphase.*

Prädikatenlogik - Begriffe

Begriff: Quantor

Quantoren werden in Verbindung mit Variablen gebraucht. Sie sagen aus, ob das nachfolgende für alle möglichen Werte einer Variablen angenommen werden kann, oder ob es einen Wert für eine Variable gilt, welcher die nachfolgenden Bedingen erfüllt.

$\forall x \in M$ *….* *Für alle möglichen* $x \in M$ *gilt …*

$\exists x \in M$ *….* *Es gibt mindestens ein* $x \in M$ *für welches … gilt.*

Prädikatenlogik - Begriffe

Begriff: Quantor

$\forall x \in$ M *….* *Für alle möglichen x* $\in$ M *gilt …*

$\exists x \in$ M *….* *Es gibt mindestens ein x* $\in$ M *für welches … gilt.*

Beispiele:

Alle Menschen sind sterblich:

$\forall x \in$ Menschen: sterblich(x) // sterblich(x) - Prädikat

Es existiert eine natürliche Zahl, die mit 5 addiert 17 ergibt.

$\exists x \in \mathit{IN} : x + 5 = 17$ *// exakter: gleich(plus(x,5),17)*

gleich ist Prädikat, plus eine Funktion

Prädikatenlogik - Beispiele

Beispiele:

- *Für alle natürlichen Zahlen gibt es eine Primzahl die größer ist.*
- *Für alle natürlichen Zahlen gilt, dass wenn x kleiner als y ist, ist y größer als x.*
- *Wenn x verwandt ist mit y und y verwandt ist mit z so ist x verwandt mit z.*
- *Ein Kopf gehört stets zu einem Menschen (oder gehörte mal zu einem, aber das soll hier nicht wichtig sein ;-)).*

-> Tafel

Prädikatenlogik - Negation

Motivation: Manchmal muss man ganze Aussagen negieren um zu beschreiben, was das Gegenteil einer Beschreibung ist.

Verneinung von:

„Alle Katzen sind schwarz."

„Für alle natürlichen Zahlen gibt es eine Primzahl die größer ist."

„Es gibt eine Zahl, die größer ist als alle anderen Zahlen."

Formal:

- Quantoren vertauschen.
- $\wedge$ und $\vee$ werden vertauscht.
- Prädikate und Funktionen werden negiert.